Capítulo 3

Álgebra de Boole

El álgebra de Boole es una estructura matemática generada por un conjunto y dos operaciones. Ésta fue introducida por el matemático inglés George Boole en 1854 para el análisis de la lógica.

En 1938, Claude E. Shannon al aplicar el álgebra de Boole, particularizada para el caso de un conjunto con dos elementos, al estudio de circuitos eléctricos de conmutación —circuitos con dos estados posibles—, sentó las bases teóricas para el diseño de los actuales circuitos digitales.

En este capítulo se introducen los conceptos teóricos necesarios para el diseño de circuitos digitales.

3.1. Términos del álgebra de Boole

Definición 3.1 *Un conjunto $\mathcal{A}$ dotado con dos operaciones algebraicas más $(+)$ y por $(\cdot)$ es un álgebra de Boole si y sólo si se verifican los siguientes postulados:*

1. *El conjunto $\mathcal{A}$ es cerrado respecto a las dos operaciones:*
$$\forall x, y \in \mathcal{A} \Rightarrow x + y \in \mathcal{A} \wedge x \cdot y \in \mathcal{A}$$

2. *Ambas operaciones son conmutativas:*
$$\forall x, y \in \mathcal{A} \Rightarrow x + y = y + x \wedge x \cdot y = y \cdot x$$

3. *Cada una de las operaciones es distributiva con respecto a la otra:*
$$\forall x, y, z \in \mathcal{A} \Rightarrow x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \wedge x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

4. *Existe el elemento identidad para las dos operaciones:*
$$\forall x \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists 0 \mid x + 0 = x \wedge \exists 1 \mid x \cdot 1 = x$$

5. *Existe el elemento complementario:*
$$\forall x \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists \bar{x} \mid x + \bar{x} = 1 \wedge x \cdot \bar{x} = 0$$

Si dado un conjunto $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, se definen las operaciones $+$ y $\cdot$ tal y como se muestran en la Tabla 3.1, éste constituye un álgebra de Boole. Este álgebra de Boole particularizada recibe el nombre de álgebra de Boole bivalente o de conmutación y es la que se utiliza para el diseño de los circuitos digitales.

$0+0=0$	$0 \cdot 0=0$
$0+1=1$	$0 \cdot 1=0$
$1+0=1$	$1 \cdot 0=0$
$1+1=1$	$1 \cdot 1=1$

Cuadro 3.1: Operaciones + y ·

3.1.1. Leyes de De Morgan

El álgebra de Boole cumple una serie de propiedades que conviene resaltar:

$$\forall x, y \in \mathcal{A} \Rightarrow$$

$$\overline{x+y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \quad (1^{\text{a}} \text{ Ley de De Morgan}) \tag{3.1}$$

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y} \quad (2^{\text{a}} \text{ Ley de De Morgan}) \tag{3.2}$$

Estas dos propiedades son conocidas como las leyes de De Morgan. Además, también es interesante tener en cuenta la siguiente propiedad:

$$\forall x \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\bar{x}} = x$$

3.2. Representación de funciones booleanas

Definición 3.2 *Una* variable booleana*, x, es un símbolo utilizado para representar indistintamente cualquiera de los elementos de un conjunto $\mathcal{A}$ sobre el que se ha definido un álgebra de Boole.*

Definición 3.3 *Una* función booleana *o* función lógica *es una aplicación de $\mathcal{A}^n$ en $\mathcal{A}$ que asocia a cada tupla de $\mathcal{A}^n$ un elemento de $\mathcal{A}$:*

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{F}: & \mathcal{A}^n & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & & x \end{array}$$

Una función booleana se puede representar mediante una *expresión algebraica* o mediante una *tabla de verdad*.

Se denomina expresión booleana de una función $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a la representación algebraica de la misma utilizando las operaciones $+$, $\cdot$ y el complementario. Un ejemplo de expresión booleana es:

$$\mathrm{F}(x, y, z) = x \cdot z + \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot \bar{y}$$

No es necesario indicar explícitamente la operación $\cdot$, por lo que la función anterior puede escribirse también en la forma:

$$\mathrm{F}(x, y, z) = xz + \bar{y}z + \bar{x}\,\bar{y}$$

Otra forma de representar una función booleana es mediante su tabla de verdad. La tabla de verdad de un función booleana recoge, por un lado, todas las posibles combinaciones de las variables x_1, x_2, ..., x_n y por otro, el valor de dicha función para cada una de estas combinaciones. La Tabla 3.2 presenta la tabla de verdad de la función $xz + \bar{y}z + \bar{x}\,\bar{y}$.

Se dice que dos expresiones booleanas son *equivalentes* si y solo si dan lugar a la misma tabla de verdad.

En la siguiente sección se muestra cómo realizar el paso contrario, es decir, pasar de una tabla de verdad a una expresión algebraica equivalente.

x	y	z	$\mathrm{F}(x,y,z)$
0	0	0	$\mathrm{F}(0,0,0)$
0	0	1	$\mathrm{F}(0,0,1)$
0	1	0	$\mathrm{F}(0,1,0)$
0	1	1	$\mathrm{F}(0,1,1)$
1	0	0	$\mathrm{F}(1,0,0)$
1	0	1	$\mathrm{F}(1,0,1)$
1	1	0	$\mathrm{F}(1,1,0)$
1	1	1	$\mathrm{F}(1,1,1)$

$\Rightarrow$

x	y	z	$\mathrm{F}(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Cuadro 3.2: Tabla de verdad de $\mathrm{F}(x,y,z) = xz + \bar{y}z + \bar{x}\,\bar{y}$

3.2.1. Expresión canónica de una función booleana

Definición 3.4 *Se llama* término canónico *de una función lógica a todo producto o suma en el cual aparecen todas las variables de las que depende esa función. A los términos producto se les llama* minitérminos *y a los términos suma,* maxitérminos.

La Tabla 3.3 muestra todos los minitérminos y maxitérminos posibles con tres variables.

x	y	z	Minitérminos		Maxitérminos	
0	0	0	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	m_0	$x+y+z$	M_0
0	0	1	$\bar{x}\,\bar{y}z$	m_1	$x+y+\bar{z}$	M_1
0	1	0	$\bar{x}y\bar{z}$	m_2	$x+\bar{y}+z$	M_2
0	1	1	$\bar{x}yz$	m_3	$x+\bar{y}+\bar{z}$	M_3
1	0	0	$x\bar{y}\,\bar{z}$	m_4	$\bar{x}+y+z$	M_4
1	0	1	$x\bar{y}z$	m_5	$\bar{x}+y+\bar{z}$	M_5
1	1	0	$xy\bar{z}$	m_6	$\bar{x}+\bar{y}+z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$	M_7

Cuadro 3.3: Minitérminos y maxitérminos

Teorema 3.1 *Cualquier función booleana puede expresarse como una suma de minitérminos o producto de maxitérminos.*

Demostración 3.1 *Por el* teorema de expansión de Shannon*, cualquier función boolena puede descomponerse como:*

a) $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \mathrm{F}(1, x_2, \ldots, x_n) + \overline{x_1} \cdot \mathrm{F}(0, x_2, \ldots, x_n)$

b) $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = ((x_1 + \mathrm{F}(0, x_2, \ldots, x_n)) + (\overline{x_1} + \mathrm{F}(1, x_2, \ldots, x_n))$

Si se aplica reiteradamente este teorema sobre las expresiones anteriores, se llega a:

a) $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i \cdot F(i)$

b) $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (M_i + F(i))$

donde $\mathrm{F}(i) = \mathrm{F}(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$*, siendo* $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n}$ *la representación en binario natural de* i*.*

Por lo que una $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *genérica se puede expresar como una suma de minitérminos o como un producto de maxitérminos, como se quería demostrar.*

Se denominan *formas canónicas* de una función booleana a la expresión de la misma como suma de minitérminos o como producto de maxitérminos.

Como se puede observar en la demostración anterior, los minitérminos m_i que intervienen en la forma canónica de una función booleana son aquellos para los cuales $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)|_{x_1 x_2 \cdots x_n = i}$ es '1'. De igual forma, los maxitérminos M_i que intervienen en la forma canónica alternativa de una función booleana son aquellos para los cuales $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)|_{x_1 x_2 \cdots x_n = i}$ es '0'. La Figura 3.1 presenta la forma de obtener rápidamente las *formas canónicas* de una determinada función $\mathrm{F}(x, y, x)$.

x	y	z	$\mathrm{F}(x,y,z)$		Minitérminos	Maxitérminos
0	0	0	1		m_0	
0	0	1	1		m_1	
0	1	0	0			M_2
0	1	1	0	$\Rightarrow$		M_3
1	0	0	0		m_4	
1	0	1	1		m_5	
1	1	0	0			M_6
1	1	1	1		m_7	

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= xz + \bar{y}z + \bar{x}\,\bar{y} \\
&= m_0 + m_1 + m_4 + m_5 + m_7 = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xyz \\
&= M_2 M_3 M_6 = (x + \bar{y} + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(x + y + \bar{z})
\end{aligned}
$$

Figura 3.1: Obtención de las formas canónicas de una función

3.3. Simplificación de funciones: Mapas de Karnaugh

Con el fin de emplear la menor cantidad posible de puertas lógicas a la hora de implementar una función booleana, resulta rentable intentar simplificarla. Para ello existen, a priori, tres posibilidades:

Reducción algebraica Aplicación de las propiedades del álgebra de Boole para simplificar la expresión algebraica. Este método presenta el inconveniente de no ser sistemático, por lo que no hay garantías de que las soluciones obtenidas sean las más simples.

Mapas de Karnaugh Sistema de simplificación gráfico y sistemático. Es útil cuando el número de variables es reducido.

Método de Quine-McCluskey Se utiliza cuando las funciones poseen un gran número de variables. Permite la sistematización total del método y para su aplicación se suele recurrir a un sistema computador. Este método escapa a los objetivos del presente texto.