Capítulo 2 . Álgebra de Boole

El álgebra de Boole (una estructura matemática generada por un conjunto y dos operaciones) fue introducida por el matemático inglés George Boole en 1854, para el análisis de la lógica humana. En 1938 Claude E. Shannon utilizó el álgebra de Boole particularizada al caso de un conjunto bivalente (dos elementos) para el estudio de circuitos eléctricos de conmutación (con dos estados posibles), sentando las bases teóricas de diseño de los actuales circuitos digitales.

2.1 - Términos del Álgebra de Boole

Para que una estructura matemática formada por un conjunto A y dos operaciones definidas sobre el mismo, que designaremos por + y •, constituya un álgebra de Boole, es necesario que cumpla las siguientes condiciones:

1 - El conjunto A es cerrado respecto de las dos operaciones:

$$\forall x,y \in A \rightarrow x+y \in A \wedge x \bullet y \in A$$

2 - Existencia de elemento identidad para las dos operaciones:

$$\forall x \in A \longrightarrow \exists\ 0 / x+0=x \wedge \exists 1 / x \bullet 1 = x$$

3 - Las dos operaciones cumplen la propiedad conmutativa:

$$\forall x,y \in A \longrightarrow x+y=y+x \wedge x \bullet y = y \bullet x$$

4 - Cada operación es distributiva con respecto a la otra:

$$\forall x,y,z \in A \longrightarrow x \bullet (y+z) = (x \bullet y)+(x \bullet z) \wedge x+(y \bullet z) = (x+y) \bullet (x+z)$$

5 - Existe el elemento complementario:

$$\forall x \in A \longrightarrow \exists\ \bar{x}\ /\ x+\bar{x}=1 \wedge x \bullet \bar{x} = 0$$

De la enorme diversidad de álgebras de Boole que pueden obtenerse variando el conjunto A y las definiciones de las operaciones + y •, la que nos interesa es la denominada ***bivalente***, en la cual el conjunto A está formado únicamente por dos elementos. Las definiciones de las operaciones + y • se muestran en la *Tabla 2.1*.

x	y	$x+y$	$x \bullet y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Tabla 2.1 - Operaciones suma, producto y complemento del álgebra de Boole bivalente

A partir de estas definiciones, resulta sencillo demostrar que la estructura que forman es un álgebra de Boole viendo que cumplen las condiciones impuestas más arriba.

Una propiedad importante del álgebra de Boole la constituyen las denominadas Leyes de De Morgan, que se enuncian a continuación:

$$\forall x, y \in A \longrightarrow$$

1ª Ley de De Morgan: $\overline{x + y} = \bar{x} \bullet \bar{y}$

2ª Ley de De Morgan: $\overline{x \bullet y} = \bar{x} + \bar{y}$

2.2 - Representación de funciones booleanas

Un símbolo x es una variable booleana si representa a cualquier elemento de un conjunto A sobre el que se ha definido un álgebra de Boole.

Una función booleana o función lógica es una correspondencia entre A^n y A que a cada tupla de A^n le hace corresponder un elemento de A.

$$F : A^n \longrightarrow A \qquad \text{Donde } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow x \qquad x \in A$$

Cualquier función booleana $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ puede representarse como expresión algebraica empleando las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ relacionadas entre sí mediante los operadores + (suma), $\bullet$ (producto), y $\overline{}$ (complemento). Por ejemplo:

$$F(x, y, z) = x \bullet z + \bar{y} \bullet z + \bar{x} \bullet \bar{y}$$

donde habitualmente el símbolo $\bullet$ no se indica, al igual que con el producto tradicional.

Dada una función $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, cada una de sus variables puede tomar los valores 0 ó 1, lo cual da lugar a 2^n valores posibles de la función. Para hallar cada uno de esos valores, es suficiente sustituir cada variable por su valor en la expresión algebraica vista arriba y aplicar las reglas correspondientes a los operadores que generan el álgebra. Todos los valores posibles de la función pueden expresarse en forma de ***tabla de verdad*** colocando cada combinación de entrada frente al valor tomado para ésta por la función.

Por ejemplo, para la función de tres variables que ha servido de ejemplo anteriormente habrá 8 valores posibles de entrada (2^3). Dicha función se halla expresada en forma de tabla de verdad en la *Tabla 2.2*.

x	*y*	*z*	**F**
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Tabla 2.2 - Tabla de verdad de la función $F(x,y,z) = x \bullet z + \bar{y} \bullet z + \bar{x} \bullet \bar{y}$

Se dice que dos funciones booleanas son equivalentes si dan lugar a la misma tabla de verdad.

2.2.1 - Expresión canónica de una función booleana

Se llaman ***términos canónicos*** de una función lógica a las sumas o productos en que aparecen todas las variables de dicha función, ya sea en su forma directa, x, o complementada, $\bar{x}$. De esta forma, *(xyz)* y *(x+y+z)* son términos canónicos de *F(x,y,z)*.

Los términos canónicos producto se denominan ***minitérminos***, mientras que los términos canónicos suma se llaman ***maxitérminos***. Para una función de n variables, existen 2^n minitérminos y 2^n maxitérminos. La *Tabla 2.3* recoge los minitérminos y maxitérminos de una función de tres variables.

x y z	Minitérminos		Maxitérminos	
0 0 0	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	m_0	$x + y + z$	M_0
0 0 1	$\bar{x}\,\bar{y}\,z$	m_1	$x + y + \bar{z}$	M_1
0 1 0	$\bar{x}\,y\,\bar{z}$	m_2	$x + \bar{y} + z$	M_2
0 1 1	$\bar{x}\,y\,z$	m_3	$x + \bar{y} + \bar{z}$	M_3
1 0 0	$x\,\bar{y}\,\bar{z}$	m_4	$\bar{x} + y + z$	M_4
1 0 1	$x\,\bar{y}\,z$	m_5	$\bar{x} + y + \bar{z}$	M_5
1 1 0	$x\,y\,\bar{z}$	m_6	$\bar{x} + \bar{y} + z$	M_6
1 1 1	$x\,y\,z$	m_7	$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$	M_7

Tabla 2.3 - Maxitérminos y minitérminos para funciones de tres variables

A partir de la definición de los maxitérminos y minitérminos, puede utilizarse el ***Teorema de Expansión de Shannon***, para concluir que cualquier función lógica puede expresarse empleando únicamente maxitérminos o empleando únicamente minitérminos. Dicho Teorema puede enunciarse como sigue:

Cualquier función booleana $F(x_1, x_2,\dots x_n)$ puede ser expresada de las siguientes formas:

a) $F(x_1, x_2,\dots x_n) = x_1 \bullet F(1, x_2,\dots x_n) + \bar{x}_1 \bullet F(0, x_2,\dots x_n)$
b) $F(x_1, x_2,\dots x_n) = [x_1 + F(0, x_2,\dots x_n)] \bullet [\bar{x}_1 + F(1, x_2,\dots x_n)]$

Así pues, aplicando este teorema reiteradamente, una función lógica puede expresarse como suma de minitérminos o como producto de maxitérminos, adaptándose a una de las dos expresiones siguientes:

$$F(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i \cdot F(i)$$

$$F(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=0}^{2^n-1} \left[M_i + F(i) \right]$$

donde $F(i) = F(a_{i1},\dots,a_{in}) / (a_{i1}\dots a_{in})_2 = i_{10}$

Un método para conseguir esto se expone en la *Tabla 2.4* para la función F(x, y, z) vista anteriormente.

x y z	**F**	**Mini**	**Maxi**
0 0 0	1	m_0	

0	0	1	1	m_1	
0	1	0	0		M_2
0	1	1	0		M_3
1	0	0	1	m_4	
1	0	1	1	m_5	
1	1	0	0		M_6
1	1	1	1	m_7	

Tabla 2.4 -Expresión de la función $F(x,y,z) = x \bullet z + \bar{y} \bullet z + \bar{x} \bullet \bar{y}$ *mediante minitérminos y maxitérminos*

Así pues, la función $F(x, y, z)$ podrá expresarse canónicamente de dos formas:

$$F(x, y, z) = m_0+m_1+m_4+m_5+m_7 = \sum_3(0,1,4,5,7) = (\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z})+(\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z)+(x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z})+(x\cdot\bar{y}\cdot z)+(x\cdot y\cdot z)$$

$$F(x, y, z) = M_2 \bullet M_3 \bullet M_6 = \prod_3(2,3,6) = (x+\bar{y}+z)\cdot(x+\bar{y}+\bar{z})\cdot(\bar{x}+\bar{y}+z)$$

2.3 - Simplificación de funciones: Mapas de Karnaugh

Con el fin de emplear la menor cantidad posible de puertas lógicas a la hora de implementar una función booleana, resulta rentable intentar simplificarla. Para ello existen, a priori, tres posibilidades:

- Reducción algebraica: Aplicación de ciertas propiedades del álgebra de Boole. Este método tiene el inconveniente de que no es sistemático, por lo que las simplificaciones obtenidas no suelen ser importantes.
- Mapa de Karnaugh: Simplificación mediante un diagrama que ubica los términos canónicos de la función de forma contigua para ayudar a la simplificación.
- Método de Quine - McCluskey: Para funciones complejas de gran número de variables. Permite la sistematización total del método y su implementación en un sistema computador. Este método escapa a los objetivos del presente texto.

El primer método utiliza reiteradamente dos propiedades del álgebra de Boole que simplifican expresiones:

$$x\,y + \bar{x}\,y = y$$

$$x + x = x$$

Este método puede conducirnos a diversas expresiones irreducibles de una misma función lógica. De ello se deduce que no todas las expresiones irreducibles son mínimas y que para encontrar una expresión mínima deberemos aplicar otro método.

Los mapas de Karnaugh fueron introducidos inicialmente por E. W. Veitch en 1952 y modificado ligeramente por M. Karnaugh (de ahí su nombre) en 1953. Consiste básicamente en una tabla de verdad de la función a simplificar, pero con la particularidad de que los minitérminos adyacentes (combinables mediante la regla de simplificación utilizada en el método anterior de forma indiscriminada) ocupan posiciones físicamente contiguas, con lo que es fácil identificar aquellos minitérminos que pueden simplificarse con otros, ya que, con esta disposición, cada minitérmino sólo puede simplificarse con sus vecinos. Adicionalmente, en los mapas de 3, 4 y más variables, también existe adyacencia entre celdas de los bordes. De esta forma, las celdas del borde superior se encuentran lógicamente contiguas a las del borde inferior y la del derecho a las del izquierdo.