UNIVERSITAT
JAUME I

E08 Informática y Sociedad
Ingeniería Informática

Curso 96/97

Índice

4.7. La máquina analítica de Charles Babbage
4.8. Percy Ludgate

Tema 5. Los monstruos mecánicos

Tema 6. La era electrónica

Tema 7. La programación de los computadores
7.1. Lenguajes
7.2. Sistemas operativos
7.3. Herramientas y sistemas de desarrollo

Tema 8. El microprocesador

Tema 9. Aplicaciones de los computadores

Tema 10. El presente y el futuro
10.1. Máquinas
10.2. Programación
10.3. Comunicaciones

Bibliografía básica

"A History of computing Technology", Michael R. Williams, Prentice-Hall Inc, NJ 07632 1985 QA71.W66

El libro trata los temas de historia de las máquinas de calcular, hasta los años 60 aproximadamente, haciendo énfasis en los aspectos de documentación histórica. Figuras y bibliografía, muy completo y ameno de lectura.

"The Microprocessor. A biography", Michael S. Malone, Springer-Verlag, New York, 1995, TK7895 .M5 M35

El libro, como su nombre indica, narra una serie de acontecimientos acerca del microprocesador, las circunstancias de su nacimiento, aplicaciones y situaciones empresariales que han tenido lugar en el mundo de la electrónica del microprocesador.

Introducción

Para conocer mejor una ciencia es camino indispensable el conocer como ha evolucionado. La Informática, entendida como la ciencia de creación, programación y aplicación de computadoras, es una ciencia muy reciente. Sin embargo, el computador, entendido como la herramienta o máquina de ayuda al procesamiento de los datos, es mucho más antiguo.

La capacidad de cálculo disponible hoy en día como consecuencia de la aparición de computadoras cada día más potentes (más veloces y con mayor capacidad de almacenamiento y comunicación) y más asequibles a todo el mundo ha hecho realidad lo que hace veinte años parecía imposible. Estamos inmersos en una revolución, consecuencia de la informática. La revolución es tecnológica, pero con un gran impacto social. La capacidad de cálculo, de representación de la información y de las comunicaciones está ocasionando el cambio de los hábitos no sólo en los ámbitos científicos o técnicos, sino también en la más cotidiana realidad diaria. Baste pensar en las diversiones, los transportes o las comodidades domésticas.

Aunque toda esta evolución no se debe únicamente a la informática (la evolución de las tecnologías, no sólo la electrónica, no la han realizado las máquinas de cálculo ellas solas) las máquinas de calcular automáticas han sido una pieza fundamental. No conviene olvidar nuestra pasada realidad para poder apreciar las ventajas que nos aportan en el presente en su justa medida, así como para poder imaginar las posibilidades que nos ofrece el futuro.

Los pasos que ha dado la Humanidad hasta la aparición del computador electrónico se remontan a los albores del Hombre, ese animal con una capacidad intelectual superior a los demás. Es por ello que a lo largo de estas páginas iniciaremos nuestro estudio con el aprendizaje del hombre de los primeros números.

No obstante esta lejanía, se ruega al lector que intente ver el conjunto de lo aquí expuesto, apreciando las necesidades y los cambios en las formas de pensar en cada época, y reflexionando como la capacidad y necesidad de cálculo de la humanidad ha evolucionado hasta el momento del nacimiento del computador tal y como lo entendemos hoy.

Tema 1. Sistemas de numeración

1.1. Concepto de numerable y número. Evolución.

Uno de los mayores hechos intelectuales de un niño es el aprendizaje del habla, seguido muy de cerca del aprendizaje a contar. Desde nuestra más tierna infancia estamos tan sumergidos en nuestro sistema de numeración que es un trabajo para la imaginación el considerar el problema abordado por humanos que todavía no han sido capaces de desarrollar esta capacidad. Una consideración cuidadosa de nuestro sistema de numeración nos conduce a la convicción de que, en vez de ser una capacidad que llega de forma natural a la persona, es uno de los hechos más grandes y destacados de la especie humana. Es hoy en día imposible el determinar la secuencia de hechos que han conducido a nuestro desarrollo del concepto de número. Incluso las más atrasadas tribus de humanos jamás encontradas han dispuesto de un sistema de numeración que, sino avanzado, era suficiente para las tareas que debían desarrollar. Nuestros ancestros más primitivos deben haber tenido poco uso de los números; en su lugar sus consideraciones deben haber sido del tipo *"¿Hay bastantes?"* en vez de *"¿Cuantos?"* en los momentos que se han visto envueltos en los asuntos de recolección de alimentos, por ejemplo. Cuando los primeros humanos comienzan a pensar y reflexionar acerca de la naturaleza de las cosas que los rodean, descubren que necesitan el concepto de número simplemente para mantener sus pensamientos en orden. Cuando comienzan a llevar una vida sedentaria, criando plantas y animales, la necesidad de un sistema de numeración razonablemente sofisticado se hace muy importante. Cómo y cuando se desarrolla esta capacidad no lo sabremos nunca, pero parece cierto que la numeración estaba bien desarrollada cuando los humanos comenzaron a vivir la vida en asentamientos semipermanentes.

Es muy popular en los trabajos que tratan acerca de la primitiva historia de la aritmética, destacar *"hechos"* acerca de los llamados pueblos *"primitivos"* y sus niveles de numeración. En estos *"hechos"* se destaca generalmente que los pueblos primitivos de Tasmania son sólo capaces de contar *uno, dos, muchos*; o que los nativos de África del Sur cuentan *uno, dos, dos y uno, dos y dos, dos dos y uno,* y así. Aunque correctos en los hechos, estas frases no explican que en las situaciones reales estas palabras que designan números se acompañan a menudo por gestos que ayudan a resolver cualquier ambigüedad. Por ejemplo, cuando se usa el sistema de *uno, dos, muchos,* la palabra *muchos* pude usarse para indicar *"mira mis manos y ve cuantos dedos te estoy mostrando"*. Este tipo de sistema está limitado en el rango de números que se pueden expresar, pero este rango es suficiente en general para tratar los aspectos más simples del existencia humana.

La carencia de la capacidad de algunas culturas para tratar con números grandes no es realmente sorprendente. Los mismos lenguajes europeos, cuando se trazan a sus versiones más antiguas, son muy pobres en numerales y expresiones. La traducción de Los Evangelios realizada por el Obispo Ulfilas en el siglo cuarto para los Godos usa una antigua palabra Gótica para diez, *tachund*, para expresar el número 100 como *tachund tachund*, que puede leerse como diez veces diez. En el siglo séptimo la palabra *teon* ha pasado a ser intercambiable con *tachund* o *hund* de los lenguajes anglosajones, y Los Evangelios en este periodo denotan cien como *hund teontig* o diez veces diez. La persona media en el siglo séptimo en Europa no estaba tan familiarizada con los números como lo estamos hoy. El estatuto de Shrewsbury establece que la condición que para cualificar a un testigo en un juicio, el hombre debe ser capaz de contar hasta nueve. Aplicar esta condición hoy en día parecería ridículo.

Probablemente el paso más fundamental en el desarrollo del sentido del número no es la capacidad de contar, sino la capacidad de ver que un número es realmente una idea abstracta en vez de ser un simple añadido a un grupo particular de objetos. Debe haber estado al alcance de la comprensión de los primitivos humanos el concebir que cuatro pájaros son distintos de dos pájaros, sin embargo no es un paso elemental el asociar el número 4 presente en cuatro pájaros, con el número 4 presente en cuatro piedras. Asociar un número como siendo una de las cualidades de un objeto específico es un estorbo al desarrollo de un auténtico significado de número. Tan pronto como el número 4 puede ser registrado en la mente como una palabra específica, independientemente del objeto que se referencia, el individuo está preparado para tomar un primer paso hacia el desarrollo de un sistema notacional para los números, y de aquí a la aritmética.

Se pueden ver trazas de etapas muy primitivas en el desarrollo de la numeración en varios lenguajes vivos hoy en día. Dantzing, en su libro *Números*, describe el sistema de numeración del lenguaje de un grupo de indios de la Columbia Británica. El lenguaje contiene siete distintos conjuntos de numerales : uno para usar cuando se cuentan objetos planos y animales, uno para objetos redondos y tiempo, uno para gente, uno para objetos altos y árboles, uno para canoas, uno para medidas, y otro para contar cuando no hay ningún objeto particular que contar. El autor conjetura que el último conjunto de numerales es un desarrollo posterior, mientras que los seis primeros son reliquias del sistema de numeración antiguo. La diversidad de numerales par a distintos objetos no está confinado a oscuros grupos tribales, sino que puede encontrarse en idiomas ampliamente utilizados, como el japonés, por ejemplo.

Entremezclado con el desarrollo de un sistema de numeración está el desarrollo de la capacidad de contar. El conteo no está directamente relacionado con la formación del concepto de número ya que es posible contar asociando los objetos que queremos contar con un grupo de piedras, granos, semillas, o los dedos de la persona que cuenta. Estas ayudas al conteo deben haber sido indispensables a las gentes primitivas que habrían encontrado el proceso imposible sin ningún tipo de ayuda mecánica. Tales tipos de ayudas al conteo aunque de forma diferente, son todavía usadas por los profesionales mejor educados de hoy, simplemente porque son convenientes. Todo conteo implica una referencia a algo distinto de los objetos contados. Inicialmente eso distinto puede haber sido granos de maíz, pero hoy en día es una secuencia de palabras memorizadas que componen los enteros. Este proceso de asociación puede haber sido el responsable del eventual desarrollo de diferentes sistemas de numeración debido a que el conteo usualmente toma la forma de contar en pequeños grupos, después contar estos pequeños grupos, luego contar los grupos de grupos, y así.

El número máximo de ítems que puede reconocer fácilmente un ser humano de una ojeada es de cinco aproximadamente. Esto puede ser la justificación del porque los grupos iniciales constan de aproximadamente cinco ítems y del porque hay tantos pueblos que usan sistemas de numeración en base 5. El proceso de contar usando los dedos desembocó sin duda alguna en los diferentes sistemas de numeración en base 10.

Cuando un sistema de numeración se ha desarrollado hasta el punto en que una base tal como 5, 10, 20 o incluso 60 ha sido evidente a un observador exterior, el eventual desarrollo de su uso en formas más altas de aritmética y matemáticas se ha alcanzado. Si la base es demasiado pequeña, entonces se precisa un número grande de figuras o palabras para representar una cifra y la pesada tarea de anotar y manipular largas tiras de símbolos pasa a ser un grave inconveniente para abordar cualquier gran problema aritmético. En el otro lado, si el número de la base es demasiado grande entonces se precisa un número excesivo de símbolos diferentes para representar un número, y se requiere asimismo aprender un gran número de reglas para realizar las operaciones aritméticas. La elección de bien un número demasiado pequeño, bien un número demasiado grande para la base pasa a ser un problema al desarrollo de las posteriores capacidades aritméticas.

Un estudio de las diferentes formas de los sistemas de numeración muestra el hecho de que un gran número de bases se han usado por diferentes pueblos en los distintos lugares del mundo. De lejos, el sistema de numeración más frecuente es naturalmente el basado en la base 10. La conclusión más obvia es que el un gran porcentaje de la especie humana comenzó a contar con los dedos de la mano. Aunque 5, 10 y 20 son las bases de numeración más populares, esto no significa que no existan sistemas de numeración basados en 4, 13 o incluso 18. Justificar las bases 5 o 20 parece fácil por las características anatómicas del hombre. No parece tan evidente el justificar como se ha llegado al uso natural de estas otras escalas.

Si se puede confiar en la lingüística moderna, la escala de 20 debe haber estado muy extendida en otros tiempos. Se ha destacado por varios autores el que algunos esquimales tienen un sistema bien desarrollado que usa términos tales como *un hombre* para el número 20, *dos hombres* para 40 y así sucesivamente. Esto implica obviamente que un sistema con base 20 estuvo en uso en cierta ocasión, aunque es difícil ver como los antiguos esquimales tuvieron acceso a sus pies para contar - salvo que estuvieran en un iglú bien caliente. Esto podría implicar que los esquimales llevaron consigo su sistema de numeración cuando se trasladaron a Norteamérica. De hecho, es posible trazar remanentes de varios sistemas basados en 20 en varios pueblos primitivos del sur de Asia.

Los idiomas europeos también muestran preferencias en el asociar objetos en grupos de 20. Es perfectamente posible que la prevalencia de la base 10 del Indoeuropeo se haya desarrollado posteriormente a partir de un sistema inicial de base 20. El ejemplo más moderno de esto es el uso en el francés del *quatre-vingt* (cuatro veintes) para 80 en lugar de *huitante*, y *quatre-vingt-dix* para 90 en vez de *nonante*. Ojeando formas del lenguaje en desuso desde el siglo trece, se encuentran formas como *six-vingt* (120), *sept-vingt* (140), *huit-vingt* (160) e incluso *quinze-vingt* (300 = 15x20), que muestran que la base 20 no era rara. La palabra inglesa *score* es otro ejemplo.

Una vez que se ha desarrollado el significado de número como entidad separada de los objetos que se cuentan, aparece el problema de asignar un nombre a los enteros. Estas secuencias de nombres, una vez establecidas, a menudo pasan a ser una de las partes más estables de los idiomas. Así pues, aunque los idiomas suelen evolucionar de tal manera que las palabras adquieren un significado y formas distintas, las secuencias de enteros suelen permanecer intactas. Asimismo, el significado inicial de los nombres de los números permanece oscuro. Entre los idiomas europeos existe una similitud evidente entre los nombres de los números, debido sin duda a su raíz común indoeuropea:

Número	Griego Clásico	Latín	Sánscrito	Francés	Alemán	Inglés	Español
1	en	unus	eka	un	eins	one	uno
2	duo	duo	dva	deux	zwei	two	dos
3	tri	tres	tri	trois	drei	three	tres
4	tetra	quantour	catur	quatre	vier	four	cuatro
5	pente	quinque	panca	cinq	fünf	five	cinco
6	hex	sex	sas	six	sechs	six	seis
7	hepta	septem	septa	sept	sieben	seven	siete
8	octa	octo	astra	huit	acht	eigth	ocho
9	ennea	novem	nava	neuf	neun	nine	nueve
10	deca	decem	daca	dix	zehn	ten	diez

La estabilidad de los números ha sido una buena herramienta para los filólogos, que disponen de extensas colecciones de números en diversos idiomas, en orden a encontrar raíces comunes en los idiomas. De todas formas se debe ejercitar esto con sumo cuidado ya que pueden existir mezclas de idioma e incluso simples coincidencias

1.2. Invención y desarrollo de los sistemas de numeración escritos

Aparecen dos etapas distintas en el desarrollo de sistemas de registro escritos, la etapa pictórica y la etapa simbólica. Las inscripciones realizadas por los pueblos en la etapa pictórica corresponden a las etapas más tempranas en el desarrollo del concepto de número. Las inscripciones tendrán un dibujo de diez animales para representar diez vacas, o diez chozas pueden representar diez grupos familiares. Esta etapa se muy fácilmente en algunos registros realizados por los indios norteamericanos justo antes de entrar en contacto con los europeos.

La etapa simbólica, por el contrario, mostrará un dibujo de una vaca seguida por cinco palotes para representar cinco animales. En esta etapa los palotes no representan ya a los objetos, si no que han pasado a ser un determinativo (un signo que se usa para cualificar el significado del objeto signo). En otras palabras, los palotes han pasado a ser adjetivos en vez de nombres. En muchas sociedades este paso debe haber llegado al mismo tiempo que el desarrollo de los números como idea abstracta. Esta etapa se ilustra mejor por los grabados en piedra dejados por los egipcios.

Una vez que una sociedad particular ha alcanzado la etapa simbólica de registro de números, el sistema de notación que se desarrolla será totalmente dependiente de las influencias culturales. El uso de dedos o piedras para contar, el número de ítems contados en un grupo antes de que se inicie un nuevo grupo (el número base), y los materiales disponibles para anotar el resultado final están determinados todos ellos por factores socioculturales. Una vez que estas variables se han determinado, el resultado conduce a uno de los dos diferentes tipos de sistemas notacionales: el sistema aditivo o el sistema posicional.

1.2.1. Sistema aditivo

En este sistema hay un símbolo distinto para cada tipo de grupo hecho durante el proceso de conteo, y este símbolo se repite tantas veces como sea necesario para indicar cuantas veces el grupo se repite. El sistema egipcio es el ejemplo clásico de un sistema aditivo, aunque mucha gente está más familiarizado con el sistema de numeración romana. En el sistema de numeración romana antiguo, antes de estar en uso las formas substractivas IV para 4 y IX para 9, es posible expresar cualquier número menor a 5000 por una secuencia de símbolos en la que cada símbolo individual no se repite más de 4 veces. Por ejemplo, el número 2976 se representaría como MMDCCCCLXXVI. Aunque es voluntario el escribir los números en sentido descendente (M = 1000, D = 500, C = 100, L = 50, X = 10, V = 5, I = 1), esto no es necesario. El valor del número en un sistema aditivo no tiene nada que ver con la posición que ocupan en la tira de caracteres que representa al número. No es ambiguo escribir el número 2976 como ILVCMCXDMXCC, pero naturalmente la facilidad de la lectura nos dice que debe realizarse la escritura en algún orden.

El sistema aditivo puro es fácil de usar para realizar cálculos simples, incluso más de lo que parece a simple vista. La adición se realiza en un proceso de dos pasos : simplemente escribir los dos grupos de símbolos de los dos números, y a continuación agrupar las secuencias de símbolos menores y sustituirlos por símbolos mayores, de tal manera que el número permanezca en una forma canónica. Por ejemplo :

2319	=	MM CCC X V IIII
+ 821	=	D CCC XX I
3140	=	MMDCCCCCCXXXVIIIII

El segundo paso ahora se puede realizar, y como IIIII = V, VV = X, CCCCC = D, DD= M, el resultado final se puede escribir como MMMCXXXX.

La multiplicación, aunque algo más lenta, no es realmente difícil y sólo implica recordar la tabla de multiplicar por 5 y 10. Por ejemplo :

28	=	XXVIII		
x 12	=	XII		
336		XXVIII por I	=	XXVIII
		XXVIII por I	=	XXVIII
		XXVIII por X	=	CCLXXX
				CCLXXXXXXXVVIIIIII

que se puede escribir como CCCXXXVI.

Las operaciones de resta y división son un poco más complejas; sin embargo, la división se ayuda por operaciones que no se usan hoy. Estas operaciones son *"duplicación"* y *"mediación"* que se describirán al hablar de la aritmética egipcia.

Aunque más tediosas que sus equivalentes en los sistemas de notación posicional, el sistema aditivo no está exento de méritos, y la computación no es difícil una vez que se dominan las reglas. La modificación de este sistema de numeración para incluir los números substractivos, tales como el IV = 4 o IX = 9 del sistema romano moderno, tiende a hacer algunas materias mucho más difícil para la aritmética. Sin embargo, est desarrollo es una modificación del antiguo sistema de numeración romano y no suelen encontrarse muchos ejemplos de notación aditiva. Ejemplos de uso de IV por el 4 o IX por el 9 se pueden encontrar incluso 130 AdC., pero esta notación no se hizo popular hasta mediados del siglo XVII, cuando los numerales romanos perdieron su utilidad para el uso cotidiano.

1.2.2. Sistema posicional

En el sistema de números posicional, los grupos de conteo se denotan enteramente por la posición del símbolo en la tira de caracteres que representa el número. Esto significa que es usualmente necesario el disponer de un símbolo cero para representar el grupo/lugar vacío. Es posible prescindir de la necesidad del cero para indicar un grupo vacío si el sistema dispone de una forma regular de posicionamiento de los otros símbolos para indicar que una posición está vacía. Este último método fue usado por los chinos y será discutido al hablar de sus numerales. El sistema posicional fue usado también por otras antiguas culturas, por ejemplo, los babilonios lo usaban 400 años AdC., pero no disponían de un símbolo para cero y por tanto la escritura de sus números es ambigua.

Las reglas de cálculo de un sistema posicional son más complejas que las usadas en los sistemas aditivos, y usualmente requieren la memorización de alguna forma de tabla de multiplicar. Debido a que sin duda estamos bastante familiarizados con nuestro propio sistema de numeración posicional, no lo describiremos en detalle. Será más instructivo examinar una sección de otros sistemas de numeración que han usado diversas culturas a lo largo de la historia.

La siguiente descripción de varios sistemas de numeración y de sus formas de representación escritas no trata de ser exhaustiva. Algunas de los mas importantes y extendidos sistemas de numeración no se mencionan aquí. El intento es simplemente mostrar la existencia de diversos sistemas de numeración a lo largo de los pueblos del mundo. La excepción a esta regla será el sistema de numeración europeo que se incluye para proporcionar algún soporte histórico de este desarrollo tan importante.

1.3. Los primeros sistemas de numeración : egipcios, griegos, europeos, orientales

1.3.1. Egipcios

Nuestro conocimiento de las formas egipcias de numeración y procedimientos aritméticos provienen de la traducción de numerosos documentos que han sobrevivido en el ambiente seco del valle del Nilo. Los registros más antiguos que han sobrevivido, fechados 3000 años AdC., revelan un sistema de representación de dos niveles que ha permanecido esencialmente igual desde el tercer milenio AdC. hasta los últimos días de la cultura del viejo Egipto. Con tan largo espacio de tiempo a considerar, cabe esperar que los lenguajes hablado y escrito, así como las necesidades de numeración hayan cambiado considerablemente. Sin embargo, debido a la naturaleza conservadora de los Egipcios educados, que generalmente pertenecían a la clase sacerdotal, los cambios no han sido tantos como cabría esperar en otras sociedades menos conservadoras.

La necesidad de contabilidad en los primeros siglos de este intervalo condujo al desarrollo de sistemas muy detallados para la cantidad de grano y cerveza a almacenar en varios lugares, y el pago de los salarios de los trabajadores. Estas cuentas son una de las principales fuentes de información sobre la notación y operaciones aritméticas de la época. Existen asimismo dos trabajos matemáticos, el papiro de Rhind y el papiro de Moscú, que dan una muy buena indicación del nivel de conocimiento matemático de los escribas. No muestran todos los procesos que los escribas debían realizar para hacer cálculos, pero proporcionan algunas respuestas a las preguntas básicas de cómo llevar a cabo algunas operaciones.

La forma de escritura egipcia más antigua es el jeroglífico, tan familiar a cualquiera que haya leído algo sobre el viejo Egipto. Este tipo de escritura gráfica es muy apropiada para la inscripción en monumentos públicos o muros del Templo, pero no es adecuada para tomar rápidas notas en papel y tinta. Cuando se intenta escribir jeroglíficos rápidamente , tienden a ser sólo bocetos de las figuras originales con líneas dibujadas en un modo cursivo (inclinado) y conectado. Con el tiempo, esta abreviación pasó a estar normalizada en lo que hoy se conoce como escritura Hierática. La escritura Hierática fue posteriormente acortada y modificada, hasta que en el siglo IV AdC. se desarrolló la escritura Demótica. Gran parte de los trabajos aritméticos y matemáticos que han sobrevivido hasta nuestros días están sobre papiros (especie de papel hecho de planta) en escritura Hierática.

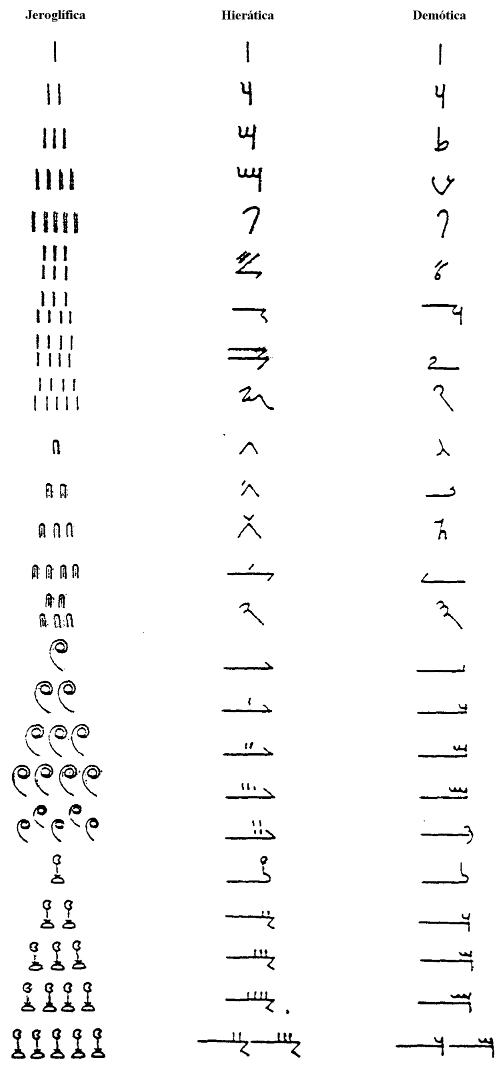

Figura 1.1 Los tres sistemas numerales egipcios

El sistema de escritura egipcio está basado estrictamente en 10, pero es aditivo más que posicional. En las últimas épocas se hicieron pequeños cambios para representar números muy grandes por un método multiplicativo, pero fue un desarrollo muy tardío. La figura 1.2. representa los siete símbolos básicos necesarios para representar un número.

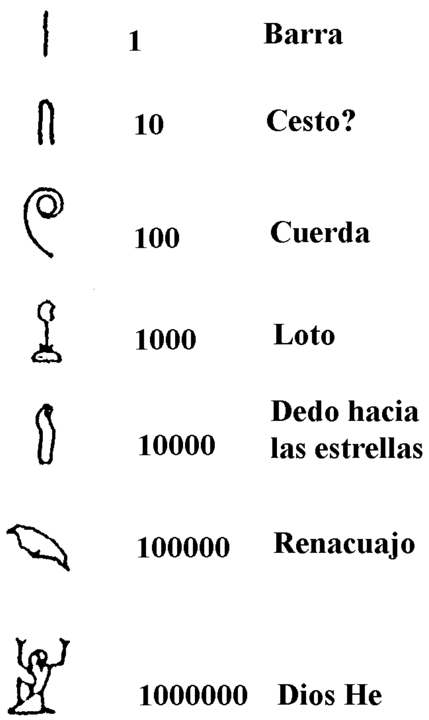

Figura 1.2 Numerales Egipcios jeroglificos

El símbolo 1 es simplemente una barra vertical, igual que el palo o rama usado en los primitivos procesos de conteo. El símbolo 10 es de origen desconocido, pero su símbolo también se emplea para representar la herradura del caballo, así como la pronunciación de las dos palabras (se conoce cómo hablaban los antiguos egipcios), lo cual induce a pensar que el símbolo fuese adoptado por similitud de sonidos. Se conocen alguna modificación del símbolo 10 en palabras que significan saco o cesto, lo que permite suponer que el símbolo está conectado con algún medio para contener diez objetos. El símbolo 100 representa una cuerda arrollada, probablemente de 100 unidades de longitud (los egipcios medían longitudes con cuerdas). El símbolo 1000 representa una planta de loto, que crecía en grandes bancos sobre el Nilo. 10000 se representa mediante un dedo apuntando hacia el cielo (a las estrellas). El Nilo estaba lleno de renacuajos, por lo que es natural emplear su símbolo para representar 100000. El último símbolo , 1000000, el dios He que sujeta el cielo se empleaba las primeras épocas, pero quedó desfasado en las últimas épocas de la civilización egipcia.

La construcción de los números fue muy regular. El símbolo mayor precedía al menor, pero al escribir los egipcios de derecha a izquierda ó de izquierda a derecha (e incluso de arriba hacia abajo) no se puede predecir en que forma se han escrito los números sin consultar el texto escrito. Desgraciadamente hay muy pocos textos con ejemplos de cómo se deletreaban los números (es decir, ocho mil veintisiete en vez de 8027), por lo que no hay una idea clara de cómo los egipcios pensaban en sus números.

En la última parte de la era egipcia se empleaba ocasionalmente un método multiplicativo. Ilustrado en la figura 1.2, consiste en la escritura sólo de un símbolo y debajo de él las unidades que este símbolo debía aparecer. Este símbolo posee innegables ventajas en el ahorro de escritura compleja para representar un número, sobre todo si se piensa que el medio donde se escribía era piedra ó una plancha de cobre.

1.325.103

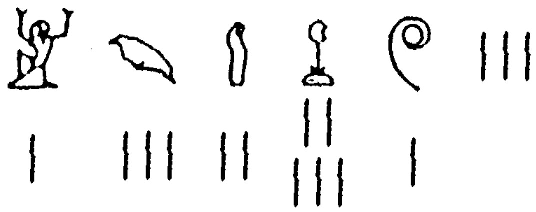

Figura 1.3 El método egipcio tardío para la representación multiplicativa de números

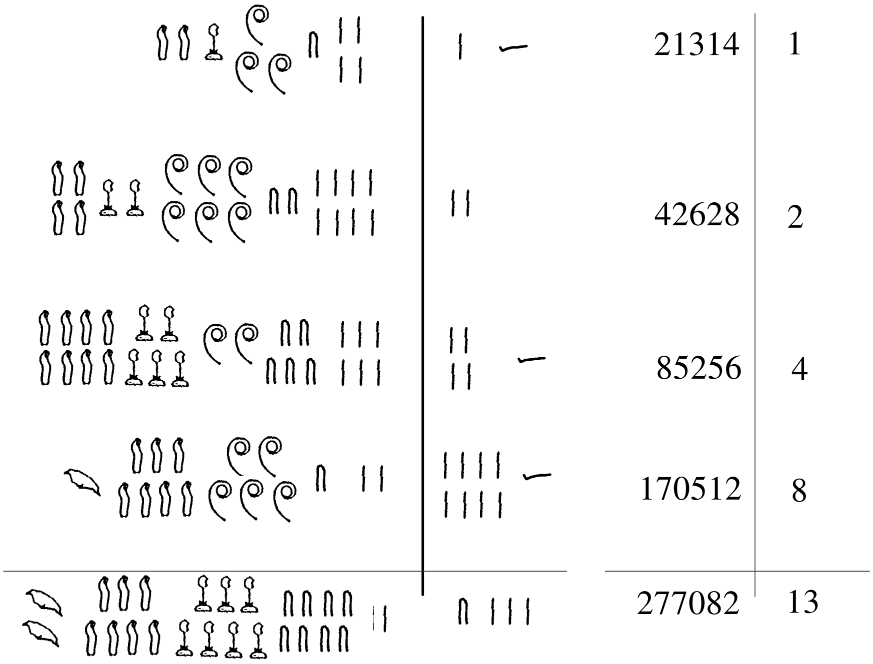

Figura 1.4 Multiplicación jeroglífica por duplicación

Al igual que con los números romanos, la suma y resta son operaciones directas y fácilmente implementables. La implementación de la multiplicación era otro asunto. Un escriba que, por ejemplo, quisiese responder a la pregunta "¿Cuanto es 21314 un total de 13 veces?" procedería como sigue:

> *Escribiría el primer número (21314) en una columna y el uno en una segunda, cómo en la figura 1.5. A continuación, bajo estos números escribiría el doble (operación bastante sencilla a partir de las anteriores, ya que sólo se necesita copiar dos veces), y continuaría este proceso de duplicar la cifra anterior tantas veces cómo necesitase, generalmente hasta que el número de la segunda columna fuese mayor que el multiplicador en uso, 13 en este caso. A*

continuación, inspeccionando la segunda columna pondría una marca junto a cada número que puede sumar para formar el multiplicador (en nuestro caso los números primero, tercero y cuarto, esto es, 1+4+8=13). A continuación el escriba sumaría los números correspondientes de la primera columna para obtener el resultado.

Se debe destacar lo siguiente de esta operación: En primer lugar, la marca realizada junto a la segunda columna es un método de describir el multiplicador en binario (13 es 1101 en binario). Los múltiplos de 21314 que corresponden a posiciones binarias con un "1" se deben sumar para realizar el producto. Esta es justamente la misma situación que emplean los computadores electrónicos para realizar la multiplicación mediante "desplazamiento y suma". Aunque los egipcios no usaron la notación binaria en ninguna otra operación, sus métodos de realizar operaciones se refieren a estos frecuentemente.

La operación básica para la multiplicación es la *duplicación*, y debido a que los griegos adoptaron esta forma para el uso en sus escuelas este mecanismo penetró en Europa. Hasta la introducción del sistema de numeración Arábigo-Hindú, los europeos seguían el método egipcio de doblar para realizar la multiplicación, y usaban una técnica similar para la división. Estos métodos fueron parte fundamental de los primeros libros de texto en Europa, en los que se instruía a los lectores que había seis operaciones aritméticas fundamentales, a saber: adición, substracción, multiplicación, división, duplicación (calcular el doble) y mediación (obtener la mitad).

La división no es mas que la operación inversa a la multiplicación, y su disposición es similar. Esta operación condujo a la complicación de las operaciones con fracciones, y por ello la notación de estos es compleja y extraña.

1.3.2 Los griegos

La civilización griega ha sido de gran interés en Europa, y su historia ha estado siempre bien documentada . Los Griegos fueron unos de los más grandes matemáticos de la antigüedad, en el campo de la *geometría* y de la *teoría de números*. Sin embargo, cuando consideramos la *aritmética* y sus procesos, tenían una firme línea divisoria entre los métodos comunes de hacer aritmética, que denominaban *logística*, y los tópicos más avanzados de la teoría de números, que denominaban *aritmética*. Desde el punto de vista teórico de los estudios de los griegos, la *aritmética* se usaba tanto como ejercicio mental como para adivinar y otros procesos cabalísticos. Debido a que esta área de estudio interesó a los primeros historiadores y matemáticos europeos, conocemos mucho de sus teoremas, mientras que el simple conocimiento de cómo realizaban las operaciones aritméticas, la *logística*, ha sido largamente ignorado.

Muchas inscripciones griegas contienen números deletreados, y parece obvio que la razón es que se procuraba que no fuesen mal interpretados. Pero este sistema no es práctico para el uso diario. Los griegos desarrollaron dos formas separadas de notación numérica que estuvieron en uso al mismo tiempo, dominando una u otra forma en función de la influencia política relativa de Atenas y las otras mayores ciudades del estado.

El sistema ático, también llamado *Herodiano* por hallarse en un documento atribuido a Herodiano, estuvo en uso al menos desde 454 AdC. hasta aproximadamente 95 años DdC. Parece que fue adoptado en Atenas, y debido a la influencia de la ciudad, se propagó a las otras partes del mundo Griego. Los numerales aparecen derivados de la primera letra del nombre del número, excepto el uno que se representa por una línea. El símbolo para el 5, ### ,se deriva de la primera letra de la palabra griega *penta*, el símbolo para el 10, ### , se deriva de la primera letra de la palabra griega *deca* y así. Conviene destacar que siendo un sistema estrictamente decimal, utilizaba un símbolo separado para el 5. Esto parece indicar la herencia de algún sistema de numeración antiguo basado en 5, lo que está soportado por el hecho que Homero, usa el término *quintear* con el significado de contar. Los símbolos áticos se combinaban en un sistema aditivo para formar números hasta 50000. El número de repeticiones de cada símbolo se limitaba a 4 mediante el uso del símbolo ### combinado con otros para dar un símbolo compuesto para los números 50, 500 y 5000. Los símbolos de los números mayores siempre se escribían antes que los de los números menores.

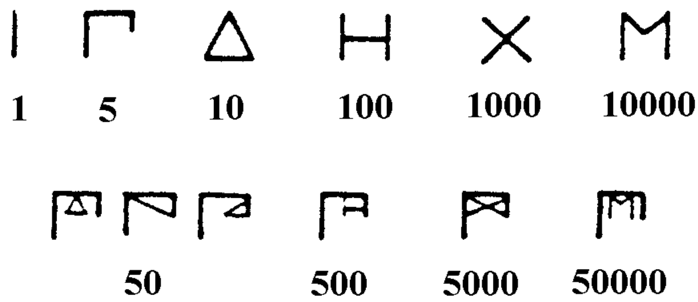

Figura 1.6 Los numerales áticos

El segundo sistema de numeración, usualmente llamado alfabético, se desarrolló en la parte griega de Asia Menor en alguna época entre el 800 y el 600 adC. La inscripción más antigua que usa este sistema es de aproximadamente 450 años adC. pero evidencia por el orden en que los griegos pusieron sus letras que la invención es varios siglos anterior. Se piensa que los griegos tomaron el alfabeto de los fenicios y que cambiaron alguna de las consonantes para representar vocales, que no se escribían en fenicio. Asignaron valores a las letras como se indica an la figura 1.7.

### = 1	### = 10	### = 100
### = 2	### = 20	### = 200
### = 3	### = 30	### = 300
### = 4	### = 40	### = 400
### = 5	### = 50	### = 500
### = 6	### = 60	### = 600
### = 7	### = 70	### = 700
### = 8	### = 80	### = 800
### =9	Ç = 90	T = 900

Figura 1.7 Los Numerales griegos alfabéticos

El sistema usa tres letras que no forman parte del alfabeto griego clásico de 24, pero parecen ser formas antiguas de letras ó caracteres arrastrados de otros alfabetos para el sistema de numeración. Este uso del alfabeto no fue único de los griegos. De hecho parecen haber obtenido la idea de contacto con otros grupos que la empleaban. Se conoce que esta técnica era empleada por los Hebreos, antiguos árabes, hindúes y otros.

Los símbolos se usaban en un sistema aditivo estricto, de una notación muy concisa pero no precisamente fácil de usar. Este sistema reemplazaba ocasionalmente al sistema ático debido a su naturaleza concisa, en algunos lugares donde el espacio estaba limitado. El primer uso oficial es en una moneda 226 años AdC. encontrada en Alejandría y representa la cabeza de Ptolomeo II. Aparece también en documentos oficiales aproximadamente 200 años AdC. y parece haber desplazado a la notación ática 100 años AdC. Permaneció por un periodo notable de tiempo, siendo de uso normal a muchas partes de mundo bastante tiempo después de desaparecida la civilización griega. Al comienzo del siglo XIV un monje llamado Barlaam escribió algunos libros de geometría y aritmética en griego usando numerales alfabéticos. Algunos de estos fueron publicados hasta 1564 en Estrasburgo.

En general, es usual escribir un número con el mayor valor primero, pero se conocen ejemplos en Asia Menor en los que lo cierto es lo contrario. Se conocen incluso ejemplos con los números escritos aleatoriamente. El sistema permite representar números de 1 a 999 fácilmente sólo con tres caracteres, lo cual era adecuado para la mayoría de usos cotidianos. Cuando se precisaban números mayores, el sistema se repetía con una marca identificadora añadida antes ó después para indicar que este era 1000 veces mayor de lo que era anteriormente: Para 10000 ó más, los numerales alfabéticos se aumentaban con el carácter usado en el sistema Ático, M, (miríada), que se colocaba antes ó debajo de la letra para indicar que debía entenderse 10000 veces más pesada que normalmente.

Los dos sistemas griegos poseían ventajas y desventajas, pero ambos sistemas eran engorrosos de usar en la aritmética, particularmente los numerales alfabéticos.

Sin embargo, parece que las personas que se han tomado la molestia de aprender numerales alfabéticos griegos, por ejemplo, los traductores, no encuentran gran dificultad en realizar operaciones aritméticas elementales. Los problemas aparecen para realizar operaciones aritméticas más avanzadas, con lo que requieren familiaridad con la tabla de multiplicar.

Tal vez, la indicación más dañina de que el sistema alfabético era engorroso viene de Ptolomeo, que para producir las tablas de su gran trabajo, *El Almagesto*, optó por usar el sistema babilonio antes que el griego porque era más fácil de usar. Esta adopción del sistema babilonio ha resultado en que tengamos 60 minutos en una hora, 60 segundos en un minuto y medidas angulares basados en múltiplos de 60.

Para evitar la ambigüedad que podría suponer el que los números se confundan con letras ó palabras, se marcaban las letras que debían ser consideradas como número, bien por una línea al comienzo y final del grupo de letras que representan un número ó más frecuentemente con una línea dibujada bajo cada letra que debe considerarse un número.

El proceso actual de realizar operaciones aritméticas bien con los numerales áticos o alfabéticos no se ha examinado con detalle todavía. Esto puede deberse a que no se ha considerado de interés y como consecuencia no sobreviven más que unos pocos documentos que describen los métodos usados. Se conoce que los egipcios usaban métodos de duplicar y dividir por dos para la realización de multiplicaciones y divisiones, pero si la persona media poseía otro mecanismo distinto a estos, se ha perdido. Se conoce que algunos matemáticos usaban otros métodos. Herón de Alejandría, por ejemplo, hacía multiplicaciones factorizando en potencias de 10. Si necesitaba multiplicar 13 por 18, escribía el problema como (10+3)###(10+8) que se puede escribir como: 10###(10+8) + 3###(10+8) lo que da 100+80+30+24 = 234. Mediante este método evitaba el conocer una gran tabla de multiplicar, y a menudo podía representar parte del problema simplemente multiplicando por 10 lo que representa pasar de un juego de números al siguiente. Cuando debía de multiplicar, simplemente buscaba resultados parciales con una tabla y los sumaba con ayuda de un ábaco.

Sabemos que los griegos usaban una forma de ábaco para realizar muchas operaciones, debido a que la literatura griega posee numerosas referencias al ábaco y contadores. Sobre este punto trataremos al hablar de los ábacos.

Hay otro hecho destacable del sistema griego. Arquimedes escribió un ensayo a Gelón, rey de Siracusa, en el que se describía como extender el sistema de numeración alfabético. En su forma clásica, este sistema permitía describir una miríada de miríadas (10^4###10^4=10^8). Tomando este como una unidad de una nueva base, y combinándolo con los símbolos previos, desarrolló una notación para números hasta 10^{16}, llamando a esta representación entre 10^8 y 10^{16} *números de segundo orden*. Tomando 10^{16} como base para sus *números de tercer orden*, podía representar enteros hasta 10^{24}. Continuó describiendo números hasta los de *noveno orden*, 10^{64}. Este sistema sólo se usó como ejercicio académico para Arquimedes y sus lectores, sin ninguna aplicación práctica.

1.3.3. El sistema de numeración en Europa

Nuestro propio sistema de numeración nos es tan familiar que no resulta interesante el describirlo. Sin embargo, si es interesante el conocer como se originó. El Imperio Romano se expandió por toda Europa y dejó su huella en todas las culturas europeas aportando su lenguaje (latín) y el sistema de numeración usado por los soldados romanos y los comerciantes. Estos numerales romanos fueron de uso tan extendido que aún hoy perduran para algunos usos especiales, como marcar las horas o los capítulos de un libro.

La llegada de lo que llamamos el sistema de numeración Arabe-Hindú, con su esquema posicional estricto y un símbolo para el cero, que debe usarse para mostrar los lugares vacíos, fue uno de las mayores invenciones de la humanidad. Este sistema permitió el desarrollo de métodos matemáticos y aritméticos que estaban muy alejados de lo que se había conocido hasta entonces. Desde nuestro aventajado punto para mirar atrás en la historia, parece que la invención del sistema estrictamente posicional y el carácter para representar el cero deben haber sido una extensión de algún sistema numérico posicional anterior.

El uso del cero no era extraño en los primeros sistemas posicionales. Los Babilonios usaban un carácter similar al cero para representar una columna vacía en la mitad de un número en el año 200 adC. , pero esto no era parte consistente del sistema. Si un número, como el 1024 requería el cero para separar dos dígitos, usaban el cero como nosotros. Sin embargo, si debían representar el número 1000, no era concebible que el cero se emplease sólo como relleno de las últimas posiciones, y escribían el número como 1 y dejaban al lector imaginar que el significado es 1000 y no 100, 10 ó 1.

Exactamente cuando y donde se usó primero nuestro sistema posicional, y los diez números en los que se basan, no se conoce. Se sabe ciertamente que vino a Europa de los Arabes, quienes lo obtuvieron del subcontinente indio. No se sabe cuando y donde lo obtuvieron los hindúes. Pudo ser un desarrollo indígena, o pudo venir de Indochina, o incluso pudo ser un desarrollo a partir del uso Babilonio del símbolo de la columna vacía. En la antigua India, así como en un gran número de sociedades, la técnica de la aritmética se desarrolló hasta cierto grado debido a la necesidad del comercio en torno a la importancia de la religión local. Las tres religiones de la India (Jainismo, Budismo, Hinduismo) consideraban la aritmética importante, como lo muestra el hecho de que fuese estudio fundamental para los sacerdotes.

Los primero usos de la matemática India se conoce en los trabajos escritos en verso, en donde se usaron complejos recursos literarios para representar números en orden a preservar el ritmo y la métrica de los poemas. Los documentos en que los numerales se usan para denotar números no son siempre guías fiables para determinar cuando apareció esta práctica. Parece que en el siglo XI se hizo un intento para racionalizar el sistema de propiedades de tierras en una parte de la India y esto ocasionó que mucha gente recuperase documentos olvidados para ayudar a sus peticiones. De las 17 descripciones conocidas usando numerales anteriores al siglo X, se ha demostrado que todos menos dos son falsificaciones. El uso más antiguo, sin duda, del cero es una inscripción escrita en la India en el año 876 D.D.C. con los números 50 y 270 representados en las versiones locales de los dígitos indios.

La historia de nuestro sistema de numeración es mucho más clara a partir del siglo IX. En el siglo VII, cuando fue fundada en Bagdad la dinastía de los califas, se incorporó el aprendizaje de los países adyacentes en la nueva cultura arábiga. Cuando los árabes conquistaban un país, tomaban a menudo el modo de escribir y en particular la notación de los numerales de los conquistados, y buscaban las fuentes de conocimiento que habían resistido los azares de la guerra.

El gran líder de la parte Este del Imperio Árabe, el califa Al-Mammum, estableció un centro académico en Bagdad, la Casa de la Sabiduría, sobre el año 800 D.D.C. La Casa de la Sabiduría era una combinación de biblioteca, universidad y centro de traducción de trabajos extranjeros al árabe. Fue la escuela de ciencia más importante desde la destrucción de Alejandría. Esta escuela conseguía y traducía documentos de los originales griego, persa, sánscrito , etc. al árabe. De hecho, gran parte de nuestro conocimiento de algunos de los más antiguos trabajos científicos vienen de las traducciones del árabe (o de otras versiones latinas) debido a que el original había desaparecido hacía largo tiempo. Estas traducciones se empezaron bajo el reinado del califa Haroum-Al-Rashid pero la mayoría se realizaron durante el reinado de Al-Mammum. La Casa de la Sabiduría fue devastada en 1258 por el nieto de Genghis-Kan que destruyó Bagdad y sus librerías y museos al igual que sucedió con la Biblioteca de Alejandría, su predecesora con un incendio.

Uno de los escolares asociados a la Casa de la Sabiduría en el siglo IX fue Mohamed Ben Musa Al-Khowaritzmi. Al-Khowaritzmi, como se le conocía, había tenido contacto con los astrónomos hindúes que vinieron a la corte de Al-Mammum para proporcionar a los árabes los conocimientos de aritmética y astronomía de los indios. Al-Khowaritzmi escribió libros de texto sobre aritmética y álgebra, y calculó tablas astronómicas para su uso en Bagdad. En su aritmética indistintamente indica que el sistema llegó a él de los Indios. Aunque no existen copias de la versión árabe original, se dispone aún de copias de las traducciones que se hicieron a otros idiomas. La Aritmética comienza con el asunto de la numeración, a continuación discute el uso de los dígitos y en especial con gran extensión del cero, y continua con una discusión sistemática de las operaciones fundamentales con los enteros.

EL trabajo de Al-Khowaritzmi fue de gran influencia, puesto que fue copiada numerosas veces y posteriormente escritores árabes basaron sus trabajos matemáticos en el modelo de Al-Khowaritzmi. El uso de los numerales indios se extendió con gran rapidez en el Imperio Árabe.

La eventual entrada de estos numerales hindúes en Europa se explica por los contactos entre árabes y europeos por el comercio y la guerra. Se sabe que los comerciantes italianos conocían el sistema empleado por sus proveedores, y que los soldados y religiosos que volvían de las cruzadas habían tenido la oportunidad de tomar contacto con el sistema árabe y su aritmética. El manuscrito europeo más antiguo conteniendo numerales arábico-hindúes fue escrito en el monasterio de Albelda en España en el 976. Los numerales se encuentran en otro manuscrito español del año 992, un manuscrito del siglo X encontrado en St.Gall, y en un documento Vaticano del 1077. Su uso durante esta época era raro, y es probable que poca gente pudiera comprender el sistema antes de la mitad del siglo XIII.

El primer gran intento de introducir este sistema de notación fue realizado por Leonardo de Pisa (1175-1250?), más conocido como Fibonacci (filius Bonaccio) que se considera uno de los matemáticos europeos más importantes de la Edad Media. En la época de Fibonacci, Pisa era una de las ciudades más importante de comercio de Italia, y a través del Mediterráneo tenía conexión con todas las partes del área mediterránea. Su padre era la cabeza de una de las casas de aduanas en Bugia, una ciudad importante del norte de África. Bugia fue un importante centro de mercaderes y escolares así que a los doce años al ser enviado a reunirse con su padre, tuvo la oportunidad de primera clase de observar el método de los árabes. Obtuvo parte de su formación en Bugia, y la leyenda dice que aprendió árabe y aritmética de un comerciante local. Posteriormente visitó Egipto, Siria, Grecia y Francia, donde tuvo pena de los métodos aritméticos locales. Encontró tan inferiores estos métodos que a su vuelta a Pisa escribió un libro titulado *Liber Abaci*, El Libro del Ábaco, que fue publicada en 1202 y revisado y ampliado en 1228. Era un tomo enorme para su época, consistente en 459 páginas divididas en quince capítulos. Los capítulos 1 a 7 introducían la notación árabe y sus operaciones fundamentales con enteros; los capítulos 8 a 11 trataban varias aplicaciones, mientras que los restantes capítulos se dedicaron a describir métodos para calcular, incluyéndose series, raíces cuadradas y cúbicas, y una breve discusión de la geometría y el álgebra. En un de estos últimos capítulos se introduce el famoso problema de los conejos y la serie de números que hoy en día lleva su nombre.

El *Liber Abaci* no fue de tanta influencia como podía pensarse, debido a que era muy largo, y a la dificultad de copiar en una época sin imprentas. También contenía material avanzado sólo asequible a estudiosos, lo que hizo que fuese conocido únicamente por un reducido número de personas, ninguna de las cuales parece haber influenciado mucho en los métodos de calcular usados en las transacciones diarias.

Aunque el intento de Fibonacci tuvo poco éxito, la idea de que los numerales arábigo-indios tomó cuerpo gradualmente en Europa. La principal fuente de información fueron varias traducciones de la *Aritmética* de Al-Khowaritzmi. el hecho de que el árabe fuese tan diferente de cualquier idioma europeo fue una dificultad para la diseminación de las ideas científicas árabes. Para aprender árabe era necesario viajar a un país árabe, y esto era peligroso en aquella época. En España se resolvió parcialmente este asunto al ser creada la Escuela de Traductores de Toledo en 1085 al ser conquistada Toledo a los moros. Una gran población mora pasó a la influencia europea. La mayor parte de las traducciones del árabe y las personas que ayudaron a la traducción provienen de la Escuela de Traductores de Toledo.

Los dos trabajos más importantes que diseminaron el conocimiento de la aritmética árabe-hindú fueron *Carmen de Algorismo* (El Poema del Algoritmo), por Alejandro Villa Dei, de 1220 y el *Algoritmus Vulgaris* (El Algoritmo Común), por John Halifax, más conocido como Sacrobosco, de 1250. Estos trabajos se basaban en parte en los trabajos de Al-Khowaritzmi o sus sucesores. Los escribieron para su uso en las universidades europeas, como París y Oxford, y no daban una explicación detallada del sistema, sino que más bien daban las bases para que un profesor pudiera explicarlo a sus alumnos. El *Carmen de Algoritmi* era especialmente difícil de seguir, particularmente en el cálculo de raíces cuadradas, ya que estaba escrito en hexámetro (un verso en Latín).

Hacia 1375 los numerales árabes estaban firmemente establecidos en Europa. Comenzaban a aparecer en los documentos de forma habitual. Pero pese a ser conocidos, existían focos de resistencia a su adopción de forma permanente y única. En 1299 la ciudad de Florencia estableció un edicto que prohibía el uso de los numerales arábico-hindúes en aquellas cifras que fuesen fáciles de modificar o alterar, por ejemplo cambiar un 0 a 6 o 9 era fácilmente realizable. En esta época, los mercaderes habían desarrollado varios trucos para prevenir esta clase de estafas con los numerales romanos, por ejemplo XII se escribía Xij, de forma que no se podía añadir una I extra sin despertar sospechas, y al ser el primer carácter mayúscula se prevenía la adición de cualquier carácter a la izquierda. Este tipo de problemas sólo existió mientras se desarrollaba las mismas protecciones para los nuevos numerales, pero hasta 1594 no se autorizó a los mercaderes de Antwarp a usarlos en contratos mercantiles o pagarés

1.3.4. El lejano Este.

Aunque se conoce bastante acerca de las antiguas formas de numerales y su uso computacional en China, hay gran dificultad en establecer fechas exactas para la introducción de varios conceptos y prácticas. Esta dificultad proviene del hecho que la anciana sociedad china tiene una gran veneración por los trabajos de los autores antiguos, y al igual que la tradición medieval europea de considerar a Aristóteles la última autoridad, limitaron su investigación a elaborar el conocimiento establecido por sus ancianos. Si cualquiera proponía un método de cálculo, lo atribuía a uno de los ancianos cuyos escritos no estaban ya disponibles. Varios autores han sido encontrados realizando esta práctica de atribuir resultados a los antiguos, y han acreditado a los chinos como que disponían de un sistema muy sofisticado de aritmética tan pronto como 3500 años AdC. Aunque existe alguna evidencia que muestra que existían capacidades tan pronto, los principales desarrollos en esta área no tuvieron lugar hasta 600 años AdC. Gran parte de nuestro conocimiento de los números chinos proviene de monumentos y monedas, debido a que los trabajos escritos acerca de la aritmética no han sobrevivido los destrozos del hombre o de las catástrofes naturales. Uno de los peores desastres fue perpetrado por Chi-Hwang-Ti, el primer emperador de la dinastía Tsin en el 213 AdC., que ordenó quemar todos los libros de China, y a los estudiantes quemarlos vivos. Fue, por desgracia, bastante eficaz en sus intenciones. Sin embargo algunos textos sobrevivieron a la purga, de aproximadamente 540 AdC., lo que indica que los chinos tenían un sistema decimal de posición bien desarrollado y usado durante algunos cientos de años. La mejor estimación es que usaban el sistema posicional desde aproximadamente 1300 años AdC., posiblemente incluso antes.

Se ha especulado que el desarrollo de su sistema decimal posicional depende del estilo de escritura adoptado por un pueblo. Las civilizaciones que tienen un sistema de escritura alfabético tienden a usar los símbolos alfabéticos para representar enteros, y al igual que los griegos, no hay una razón real para detener la asignación de símbolos una vez asignados del 1 al 9 a sus símbolos. La escritura ideográfica china no tiende a asignar símbolos individuales a números mayores que 9, debido a que no necesita usar todos los símbolos del alfabeto. Es totalmente cierto que los chinos fueron los primeros en usar un sistema decimal completamente formado para la representación de números.

Los caracteres usados por los chinos son sin duda alguna dibujos muy simples de los palotes usados en los procesos primitivos de conteo. Al igual que los sistemas egipcios, los enteros del 1 al 5 se representan por palotes verticales, pero para representar números de 6 al 9 empleaban una abreviación consistente en un trazo horizontal representando cinco conjuntamente a los trazos verticales necesarios para representar el dígito requerido. El sistema se muestra en la figura 1.8.

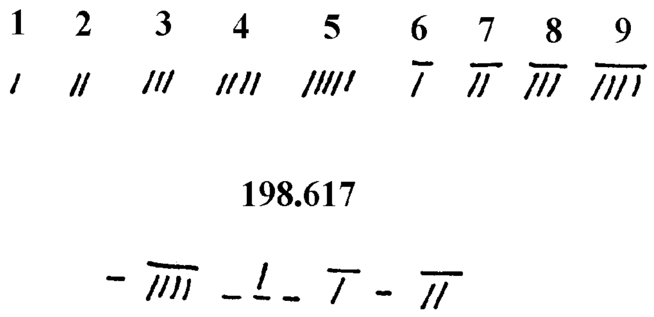

Figura 1.8 Numerales chinos y su representación girada

Durante los cálculos, los números se representaban por un conjunto de barras de cálculo que se situaban formando los numerales requeridos. Cuando se intentan representar números de varios dígitos, (ver fig.1.8), como el 198 617, es fácil confundir una barra como perteneciente a un dígito vecino. En orden a evitar este problema, aplica la técnica de rotar los trazos de cada dígito par. Esto significa que el dígito 1 se representa como | (línea vertical) si se usa en unidades, centenas, decenas de millar, o millones, y por - (línea horizontal) si se usa en decenas, millares, o centenas de millar. Por ejemplo, ver fig.1.8.

En los últimos años llegó a ser usual el realizar la aritmética sobre un tablero cuadrado grande, similar al tablero de damas, con cada dígito de un número ocupando un cuadrado separado. Este elimina la necesidad de rotar los dígitos adyacentes 90 grados, pero debido a la carencia de un dispositivo o símbolo para representar una columna vacía (cero) cuando se copia el resultado, la orientación de los numerales es todavía necesaria para su comprensión. La representación del cero se añadió al sistema, probablemente por influencia de la India en torno al año 800 DdC.

Las barras y el tablero cuadrado proporciona un sustituto del uso moderno de papel y lápiz. Los números a sumar se sitúan en el tablero uno sobre otro y el resultado de la suma se representa en otra línea de barras bajo las anteriores. La substracción se realizaba colocando las barras de la solución sobre las barras de los dos números, creando un problema de suma. La multiplicación y división, sin ser exactamente equivalente a nuestro método de papel y lápiz, se pueden comprender fácilmente por una persona de nuestros días. Se ha conjeturado ya que los chinos escribían de arriba abajo, que el uso de los tableros de cálculo en posición horizontal indica que el método puede haber sido desde otra cultura. No hay evidencia real de esta conjetura, pero no está fuera de lo posible que el sistema fuese adoptado de la India o Tai. Conviene destacar que la palabra Tai de los números y los chinos son muy similares, sin disponer ambos lenguajes otras palabras en común.

Una indicación de la sofisticación de este sistema es que los primeros chinos tenían una noción de los números negativos. Las barras de cálculo se disponían en dos colores, rojo para los números positivos y negro para los negativos. Hay también alguna indicación de que al menos en los últimos años, las barras de cálculo fueron modificadas grabando números individuales en las barras individuales. No se conoce nada del uso de este sistema, pero es posible que fuese una primitiva intentona del uso de una notación decimal.

El juego completo de cálculo tradicional contiene 271 piezas, cada una de 0.25 cm. de diámetro y 15 cm. de longitud. Inicialmente se construían de bambú, pero después del 400 AdC., se construían en marfil, hueso o cuerno, y en alguna época entre el 600 y 900 DdC., se fabricaron de hierro forjado. Una de las formas antiguas de indicar el estado o condición de un hombre como rico y decir que "puede calcular con barras de marfil".

Las barras de cálculo se usaron en China hasta el año 1600, cuando la popularidad del ábaco de alambres y bolas hizo que desapareciesen las referencias a él. El ábaco de bolas es sin duda más fácil y rápido que el usar barras en el tablero, pero las barras son una herramienta muy potente en manos de un operador entrenado. En el siglo XI DdC., se describía a un astrónomo como que "movía sus barras de contar como si volasen, tan rápido que el ojo no podía seguir sus movimientos antes de obtener el resultado". La fecha de introducción del ábaco de bolas no se conoce con certeza, pero se sabe que una reforma del calendario realizado en 1281 DdC., fue realizado calculando con las barras, mientras que otra reforma de 1384 se realizó con el ábaco de bolas. Por lo tanto, el ábaco de bolas desplazó a las barras en los comienzos del siglo XIV DdC.

En los últimos años los chinos usaron tres sistemas numerales distintos. El primero se usaba en la escritura ordinaria, el segundo era un juego especial de numerales para el uso en documentos legales por la facilidad con que el primer juego puede ser alterado, mientras que el tercero, por su sencillez, se usaba en las tareas ordinarias de escritura o contabilidad. (Figura 1.18)

De la China el uso de las barras de cálculo y representación de numerales basados en ellos, pasaron a Corea. Allí se adoptaron con gran firmeza, sin ser desplazados totalmente con la aparición del ábaco de bolas. Incluso en el siglo XIX el uso de las barras de cálculo era tan evidente que era obvio su aplicación en los extranjeros.

Poco después de la introducción del budismo en Japón, en el año 552 DdC., dos estudiantes coreanos pasaron a Japón para proceder al estudio de la fe. Además del budismo, son los responsables de la introducción del calendario chino y el sistema astrológico chino. Con ellos vino el conocimiento de los numerales y las barras de cálculo. En el año 600 DdC., cuando los japoneses adoptaron el sistema chino de medida, el uso de las barras de cálculo estaba perfectamente establecido.

Uno de los problemas de realizar aritmética con las barras de cálculo es su tendencia a rodar, sobre todo si el tablero no está perfectamente nivelado. Los japoneses resolvieron el problema fabricando las barras con sección cuadrada. Esta mejora obvia no parece haber pasado a los coreanos o chinos, debido probablemente a lo firmemente establecido y a ambas culturas, o simplemente porque consideraban a los japoneses unos bárbaros y rechazaban adoptar sus ideas.

1.4. Otras formas de notación.

Hemos hablado en este capítulo de varias formas diferentes en los que la gente usaba material escrito para anotar los resultados de sus cálculos. Debe tenerse en cuenta que la mayoría de las sociedades antiguas de nuestro mundo no tuvieron la fortuna de un acceso razonable a grandes fuentes de material escrito. Las tablas de cera o barro usadas por los babilonios y griegos, no estaban disponibles en todas las latitudes. Incluso cuando las materias primas se podían obtener con facilidad, no se usaban debido a la necesidad de cocer o mantener frescas para conservar sus anotaciones. Lo que parece más cotidiano y razonable para anotar, el papel y el lápiz, no estaban disponibles por representar un desarrollo tecnológico tardío. El papiro se conoce en Egipto 600 años AdC., y el pergamino se disponía 400 años AdC. Incluso las sociedades que disponían de pergamino o papiro sólo lo usaban para anotar hechos importantes, por la dificultad de producir y conservación cara. Debido a estos factores grandes secciones de la población debieron desarrollar representaciones alternativas para representar la información. Se usaron gran variedad de materiales, pero los nudos en cuerdas o marcas en palos fueron las formas más comunes.

1.4.1. Cuerdas anudadas.

Todas las culturas usan cuerdas para las tareas cotidianas. Por lo tanto, parece natural pensar que utilizasen nudos en cuerdas para representar formas elementales de datos. Las cuerdas anudadas son superiores a otras alternativas obvias, tales como un saquito de piedras como contador, porque no hay seguridad de que la información no se pierda si se rompe accidentalmente el dispositivo de registro. La cuerda anudada podía también ser una elección obvia como herramienta de memoria en muchas sociedades debido al uso habitual en el contexto de la magia y religión. Los nudos tiene también historia como herramienta de brujos y médicos.

Aunque hay muchas anotaciones históricas que indican que las tiras de nudos se han usado para anotar información, esta técnica parece perderse en las modernas sociedades, excepto en usos ocasionales de ceremonias, principalmente por grupos religiosos. Por ejemplo, se sabe que los antiguos hebreos usaban cuerdas anudadas para anotar (ej. Deuteronomio 6,6-8) y recordar la ley. Según la tradición Dios enseñó a Moisés la forma exacta de realizar estos nudos para hacerlos más sugestivos. Algo similar en las cuerdas blancas y azules de los practicantes judíos ortodoxos, anudadas con nudos a diferentes distancias para recordar los mandamientos.

En la Biblia se encuentra otra referencia a nudos en el Antiguo Testamento. Por ejemplo, Ezequiel 40,3 nos da una visión del profeta de un hombre "con una cuerda de medir y un rollo de cuerda en sus manos" para tomar la dimensión exacta del futuro templo. Se ha supuesto que el rollo de cuerda se usaba para anotar las medidas mediante series de nudos. En la época de Ezequiel este comentario seria obvio a la gente , pero esta idea se pierde por los lectores modernos.

Incluso tan tarde como el siglo III DdC. los recaudadores de impuestos en la Palestina romana usaban nudos para anotar las cantidades recaudadas y para dar recibos. Incluso cuando este mecanismo fue reemplazado por la escritura, los recibos se citan como "nudos publicitarios".

Las referencias en la literatura al uso de nudos no está confirmada solamente en las referencias bíblicas. Hay referencias contadas a las antiguas fuentes arábicas que se refieren en dígitos como nudos. Aunque es altamente probable que las referencias árabes se refieran al uso de nudos como dispositivo de anotación, algunas referencias usan el término nudo para nombrar a números múltiplos de 10 -esto es 10, 20, 30,...- .Esto parece indicar que el término nudo, referido al número, puede significar algo diferente a cuerdas anudadas, o que los números se empleaban para representar los múltiplos de 10 mientras los dígitos se representaban de alguna otra forma, por ejemplo el nº de hilos de la cuerda o alguna marca en la sección inferior de la cuerda.

La China también posee datos históricos que indican que cuerdas anudadas se usaron como dispositivo de registro. En un apéndice a un tratado histórico Confucio dice:

> *"En la gran antigüedad, las cuerdas anudadas servían para la administración de los asuntos. Durante la siguiente generación el hombre santo Fou-Hi los reemplazó por la escritura ".*

La tradición sitúa a Fou-Hi en el año 2800 AdC. aunque este pasaje podía indicar que el uso de la cuerda murió muy pronto en la historia china, también es cierto que esto es un ejemplo de la corrupción de los registros históricos por el crédito dado a los antiguos. Se encuentran referencias del uso del nudo incluso hasta el año 300 AdC. en el comienzo de la dinastía Han. Incluso después de que los materiales escritos fuesen de uso común en China, algunas técnicas antiguas referidas a la representación de números parecen haber sobrevivido. Como en otras sociedades esta estaba generalmente relacionada con la magia o la religión. El trabajo mágico o adivinatorio conocido como *Yo, Ching* contiene dos diagramas de una antigüedad fuera de duda. Su fuente de acuerdo a la ley fue que estos fueron presentados a su antiguo emperador (Yu el Grande) por dos animales mágicos que salieron del Río Amarillo. Estos diagramas representan un cuadro mágico de 3 x 3 (en el cual la suma de cualquier fila, columna o diagonal da 15) y su cuadro representando los enteros del 1 al 10. Los números, en cada caso, se representan por cuerdas anudadas, las cuerdas que representan números pares (yin) son negras, mientras que los que representan números impares (yang) son blancos.

No todos los ejemplos de uso de nudos para anotar información vienen de pasados remotos. En Alemania, por ejemplo, los molineros usaban nudos para anotar la cantidad y tipo de harina enviada a los panaderos. Los tipos usados para atar los sacos se anudaban de forma especial para anotar el contenido del saco. Una medida de harina se indicaba mediante un nudo simple, dos por un nudo simple y una vuelta adicional a través de él, y así se empleaban nudos más complejos para anotar cinco y diez medidas de harina. El tipo de harina se anotaba mediante una serie de lazos a los extremos de la cuerda.

Otro ejemplo moderno nos viene de La India. Durante el censo de 1872, debido a la falta de educación de los que tomaban los datos del censo, se usaban cuatro cuerdas de colores para anotar la población de los pueblos. Se anotaba un nudo por cada individuo, usando una cuerda negra para los hombres, la roja para mujeres, blanco para niños y amarillo para niñas.

La práctica de usar cuerdas anudadas fue también común en varios grupos de Indios Americanos desde el interior de la Colombia británica hasta la mitad de América del Sur. Los Incas, desde la costa norte de América del Sur, fueron los únicos que desarrollaron realmente un sistema más allá de la simple anotación de ítems elementales, tales como el número de días que habrán transcurrido desde un determinado evento. Los incas fueron una excepción, eran un pueblo altamente civilizado con un gobierno sofisticado y sin embargo tenían poco desarrollado un lenguaje escrito. El uso de cuerdas anudadas alcanzó su mayor desarrollo en el siglo XV en el dispositivo inca conocido como *quipo* (quipo es la palabra inca para expresar nudo). El quipo tenía dos funciones básicas: Anotar simple información numérica y ayudar a la memoria para los historiadores para recordar tradiciones históricas, poemas, listas de reyes, etc.

El uso del quipo se basaba en el sistema decimal, y los diferentes tipos de anotación se indicaban por el espesor o color de las cuerdas. Muchos de los quipos en existencia hoy se descubrieron a lo largo de la costa del Pacífico del Perú, y debido al manejo no adecuado, antes y después de sus propietarios, tienden a parecer nada más que una ropa trabajada y anudada.

Una de las descripciones más tempranas del quipo proviene del español Pedro de Ciera de León (nacido en Sevilla en 1519) que se trasladó al nuevo mundo con 14 años . Al contrario que otros primeros europeos en América, fue muy cuidadoso en el anotar el estilo de vida de los incas, y hablando de sus anotaciones, decía:

> *"Los quipos peruanos son de lana hilada, y consiste en una cuerda larga con mechones más finos atados a ella mediante nudos. Estos mechones contienen la información del quipo, en el que se anota por nudos simples o entrelazados artificiales. Los diferentes colores de los nudos tienen significados diferentes, y no sólo se considera el color y modo de entrelazado de los nudos en la lectura del quipo, sino también el modo de hilado de la cuerda, la distancia entre los nudos y la forma de la cuerda principal. Se anota en ellos todo tipo de información, como los registros del tributo, la población de las tribus, lista de arcos y tropas, inventario del contenido de los almacenes. Se usaban también para anotar los sucesos más importantes, y así tomaban el lugar de las crónicas.*

La forma más común del quipo consistía en una cuerda con varias cuerdas arrolladas sobre ella. Estas cuerdas se anudaban mediante cuerdas en la parte superior, y la distancia de la cuerda principal indicaba su posición decimal. La figura 1.9 muestra un quipo en el que se ha anotado los siguientes números: (leyendo de izquierda a derecha)

225 + 229 (inferior)	= 454 (superior)
155 + 238	= 438
379 + 162	= 541

	1433

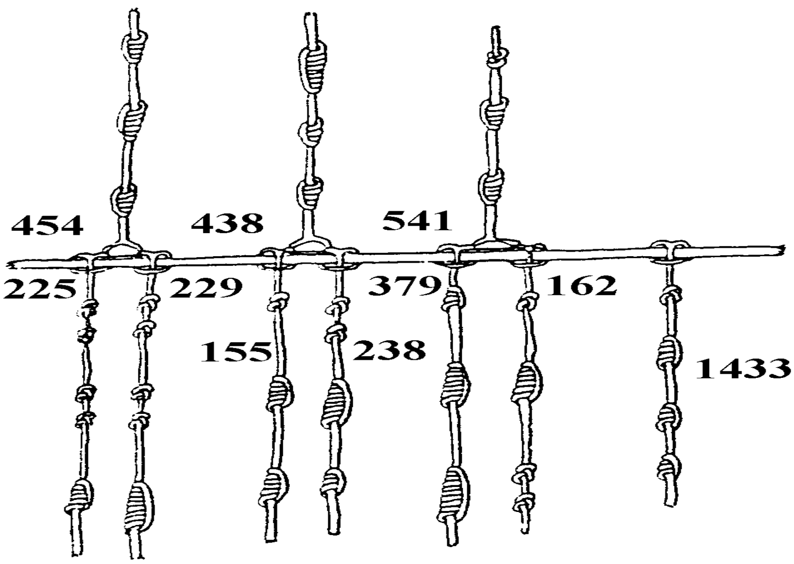

Figura 1.9 Quipu inca

1.4.2. Bastones tallados.

Otros dispositivos que se han usado para anotar información han sido los palos tallados. Aunque este método de anotar información se ha usado en casi todas las civilizaciones, en muchas culturas modernas no se dan síntomas de que haya habido un uso de cierta importancia. El ejemplo más antiguo viene del hueso de Ishargo encontrado en la orilla del lago Eduardo del Zaire. Este pequeño hueso, de 8000 años de antigüedad, tiene un pequeño cristal de cuarzo en un extremo, y posee tres columnas de entalladuras cortadas en las paredes del hueso. Examen microscópico del hueso muestra que las marcas se han realizado con 39 objetos diferentes representando por tanto una anotación de sucesos más que una decoración sobre el hueso. Existe una limitada evidencia que sugiere que puede representar algún tipo de notación basada en el calendario lunar. Si este fuese el caso, las anotaciones corresponde a eventos durante más de seis meses. Si este hueso corresponde a una anotación de tipo numérico, se puede encontrar trazos de este tipo de anotación hasta esculturas del Paleolítico Superior 30.000 años AdC.

Hay tantos ejemplos del uso de bastones marcados en diferentes partes del mundo, que es imposible describirlas todas. La disponibilidad universal de palos y herramientas de coste en todas las culturas hacen que se usen para las tareas de anotación y mantenimientos de registros. Muchos museos etnográficos contienen ejemplos varios su uso en una forma u otra. Los chinos usaban palos tallados al mismo tiempo que usaban cuerdas anudadas. Los habitantes de las islas de Liu-Chhiu poseen algunas tradiciones que datan de la fecha en que el uso de cuerdas anudadas y bastones tallados era habitual en toda la China. Los habitantes de Liu-Chhiu estaban aislados de sus vecinos y al ser muy conservadores de tradiciones, adoptaron nuevas ideas muy lentamente cuando se establecían contactos con el exterior. Usaban un juego muy sencillo de palos tallados para mantener anotaciones de años, dinero, etc. Los palos eran entre 30 y 75 cm. y de 2.5 cm. de gruesos. Sobre los palos se marcaban un juego primitivo de numerales, similar a los antiguos numerales de palotes de la China, pero mostraban una preferencia por el uso de base 5, más tradicional en Corea.

Uno de las más obvias evidencias del uso de bastones tallados subsisten en China. El carácter escrito para significar un acuerdo o contrato se realiza a partir de tres radicales, dos en la parte superior y uno en la parte inferior. El primer radical superior es un palo o bastón con cortes sobre él y el segundo es un cuchillo. El radical inferior es un carácter que representa algo grande, por lo tanto el contrato se representa como "un gran palo tallado".

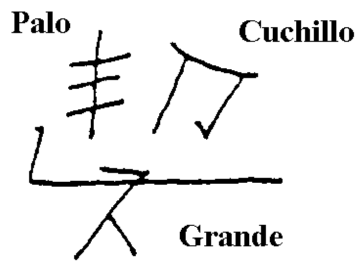

Figura 1.10 Símbolo chino para el contrato

Otro punto posterior del uso de palos tallados ocurrió en Inglaterra entre los siglos XIII y XIX. Las deudas o pagos se anotaban a lo largo de madera de olmo mediante incisiones en los bordes del palo. El palo se dividía a lo largo en dos piezas, una delgada y otra gruesa. Una parte contenía una, y la otra parte la otra, como un resguardo de un envío o recepción. Según se realizaban los pagos, las dos piezas se comparaban para comprobar que no se habían olvidado ninguno por ambas partes. Esta costumbre ha sido tan frecuente en la cultura británica que hay muchas palabras que provienen de este hecho.

Los palos en los bancos eran de tamaño y posición en función de la cantidad representada.

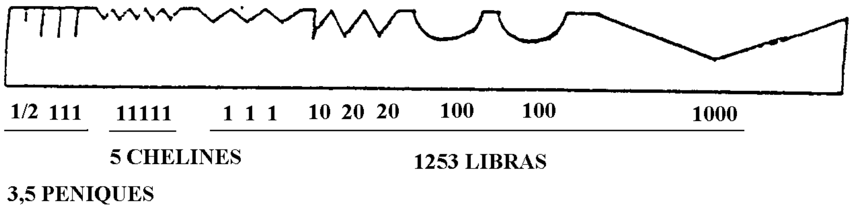

Figura 1.10 Palos tallados para representar números usados en Inglaterra

1.4.3. Otros métodos de notación numérica.

Hay naturalmente otros métodos usados para almacenar y manipular información numérica a lo largo de la historia de la humanidad. Situaciones especiales requieren algunos sistemas especiales, por ejemplo, la invención del sistema Braille de numeración y escritura para permitir a los ciegos leer y escribir. En algunos casos estos sistemas se creaban para permitir lectura o escritura a personas con algún tipo de discapacidad.